Ještě několik příkladů ke „přednášce" 20.4.

Výpočet dvojného integrálu $\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$, $f \in C(\omega)$ a

kde $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ (tj. „obdélník" v rovině)

1. $$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle} x\cdot y\,dx\,dy \underset{F.V}{=} \int_0^1 \left(\int_0^2 xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x\cdot\left(\int_0^2 y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = \underline{1}$$

nebo (integrace „v obráceném" pořadí – dle Fubiniho věty na pořadí integrace nezáleží)

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle} xy\,dx\,dy \underset{F.V}{=} \int_0^2 \left(\int_0^1 xy\,dx \right) dy = \int_0^2 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 y\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \underline{1}$$

nebo (dle příkladu posledního v přednášce):

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle} xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^2 y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{1}$$

(jistě „nejlepší" postup – nutno umět)

Podobně

2. $$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle} e^{x+y}\,dxdy = \iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle} e^{x} \cdot e^{y}\,dxdy = \int_0^1 e^x dx \cdot \int_0^1 e^y dy =$$

$$= \left(\int_0^1 e^x dx\right)^2 = \left(\left[e^x\right]_0^1\right)^2 = \underline{(e-1)^2}$$

nebo dle Fubiniho věty (jako „dvojnásobný")

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle} e^x \cdot e^y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^x e^y dy\right)dx = \int_0^1 e^x\left(\int_0^1 e^y dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 e^x \left[e^y\right]_{(y=)0}^{(y=)1} dx = (e-1)\int_0^1 e^x dx = (e-1)^2 ,$$

a „úplně" stejně při obráceném pořadí integrace.

3. $$\iint\limits_{\langle 1,2\rangle \times \langle 0,1\rangle} x^2 \cdot e^{xy}\,dxdy \underset{F.V.}{=} \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 e^{x \cdot y} dy\right)dx = \int_1^2 x^2 \int_0^1 e^{xy} dy =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^2 x\left[e^{xy}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^2 x\,(e^x - 1)\,dx = \ldots$$

(dále už integrovat „umíte") $\left(= \left[(x-1)e^x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \ldots\right)$

Poznámky k tomuto příkladu:

1. V písemce u zkoušky z MA2 vždy byly dva příklady aplikace a výpočtu dvojného, nebo trojného integrálu. Ale výpočet může být ukončen formulací „posledního" integrálu při aplikaci Fubiniho věty, tj. stačilo, když „se došlo" k integrálu funkce už jen jedné proměnné – – tento integrál už nebylo třeba „počítat" (i tak někteří studenti došli až k výsledku (číselnému)) – tak já též budu většinou končit u takových integrálů a budu předpokládat, že dál už to „umíte".

2. Fubiniho věta říká, že „u" $\iint\limits_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x,y)\,dx\,dy$ nezáleží na pořadí integrace, to se týká samozřejmě „výsledku" počítání, ale často „obtížnost" výpočtu integrálu na pořadí integrace dost závisí – tak vždycky chvilku o integrálu, který je před vámi, přemýšlejte, a pořadí integrace zvažujte! U příkladu 3 – obrácené pořadí:

$$\iint\limits_{\langle 1,2\rangle \times \langle 0,1\rangle} x^2 e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^2 e^{xy}\,dx \right) dy$$ – vidíte, že „začátek"

integrace, tj. $\int_1^2 x^2 e^{xy}\,dx$ – 2× integrace per partes ještě s „parametrem" $y \in \langle 0,1\rangle$ – bude už horší, a dále už „podle" y integrovat nebudeme „umět".

3. V přednášce jsem asi dost (v příkladech na tabuli) nezdůraznila, že při aplikaci Fubiniho věty se začíná „integrovat „z vnitřku":

$$\iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} f(x,y)\,dx\,dy \underset{\substack{\text{F.V.}\\ \text{(nepř.)}}}{=} \underbrace{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}_{\substack{\text{tomuto integrálu se}\\ \text{říká „dvojnásobný"}\\ \text{(často)}}} = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

kde $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ (při integraci x – „parametr")

A ještě je užitečná dobrá rada při začátku cvičení výpočtu dvojného integrálu – při výpočtu „vnitřního" integrálu

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \Big[F(x,y) \Big]_{y=c}^{y=d}$$

↙ x – parametr, F – primit. fce vzhledem k „y"

některým pomáhá si moc označit i $\Big[\quad \Big]_{y=c}^{y=d}$

– aby bylo pak dosazeno za y („x" se tam „plete")

(samozřejmě stačí $\big[F(x,y)\big]_c^d$ – pak je ale třeba být „ve střehu" a dosadit za y! (správně))

4. $$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle} \frac{y}{x+y^2}\,dx\,dy$$ – zde se integruje racionální funkce $v(x,y)$, a tedy až budeme přemýšlet o „vnitřních" integrálech před aplikací Fubiniho věty, tak

(trochu „horší" příklad)

„jeden" bude: (1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{y}{x+y^2}\,dy$ a „druhý" $\displaystyle y\int_0^1 \frac{1}{x+y^2}\,dx$ (2)

– tedy je teď dobré „vrátit" se do MA1 – oba přístupy zvládneme, ale jeden krok bude vždy per partes – u (1) jako vnější integrace, u (2) též; ukážeme si postup s (1), s (2) zkuste sami:

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle} \frac{y}{x+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_1^3 \frac{y}{x+y^2}\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\Big[\ln(x+y^2)\Big]_{(y=)1}^{(y=)3} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \big(\ln(x+9) - \ln(x+1)\big)\,dx \underset{\text{per partes}}{=} \dots$$

nebo:

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle} \frac{y}{x+y^2}\,dx\,dy = \int_1^3 y\left(\int_0^1 \frac{1}{x+y^2}\,dx\right) dy = \int_1^3 y\,\Big[\ln(x+y^2)\Big]_{(x=)0}^{(x=)1} dy =$$

$$= \int_1^3 y\,\big(\ln(1+y^2) - \ln y^2\big)\,dy \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} y^2 = t \\ 2y\,dy = dt \\ y=1 \rightarrow t=1 \\ y=3 \rightarrow t=9 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^9 \big(\ln(1+t) - \ln t\big)\,dt =$$

$= \dots\dots$ (dále integrace per partes)